ANALİZ II DERSİ 2022-2023 ARA SINAVI

Sınav Talimatları:
Sınavda **7 soru** yer almaktadır. Bu sorulardan **4 tanesi çoktan seçmeli** (test formatı-şıklı) **3 tanesi klasik sorulardır**.
Test sorularında sadece **doğru cevabı işaretlemeniz yeterlidir**. Herhangi bir **çözüm istenmemektedir.**
Kalan 3 sorunun her birinin cevabı ilgili sorunun hemen altında yer alan **Dosya ekle** sekmesine tıklanarak **pdf formatında** yüklenmelidir. **Her soru için ayrı bir pdf dosyası** ilgili sorunun **Dosya ekle** sekmesine tıklanarak yüklenmelidir. Sistem **jpg vb. resim formatındaki dosyaları kabul etmeyecektir.**
Klasik soruların her biri 20 puan, test sorularının her biri 10 puandır.
Sınav süresi **90 dakikadır**. Bu süreye 3 soru için ayrı ayrı yüklemeniz gereken pdf dosyalarını **yükleme süresi dahildir.**
Form yalnızca 1 kere gönderilebilir olduğundan **sadece sınavınız bittiği zaman en aşağıda yer alan gönder** sekmesine basınız.
12.30 da sistem kapanacağından 12.30 dan sonra yükleme yapanlar veya formdaki **gönder sekmesine basmayanların sınavları geçersiz olacaktır.**
O nedenle **süre bitimine doğru** eksik sorunuz kalmış olsa da formu **göndere basınız.**
3 klasik, 4 çoktan seçmeli sınav için fazlaca yeterli olan **90 dakika içinde talimatlara uymayan öğrenciler için sorumluluk kabul edilmemektedir.**
Son olarak formda yer alan Adınız Soyadınız sorusuna cevap olarak adınızı soyadınızı yazmadan formu göndere basmayınız.
Başarılar dilerim.

* Zorunlu soruyu belirtir

1. E-posta *

2. Adınız Soyadınız *

3. Aşağıda verilen fonksiyonun türevini bulunuz.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x|\le 1 \\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1 \end{cases}$$

Gönderilen dosyalar:

4. Her a ve b reel sayısı için aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$$\left|\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{b^2+1}\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{8}\,|a-b|$$

Gönderilen dosyalar:

5. Aşağıda verilen fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Bu soruda fonksiyonun değişimini incelemeden sadece grafiği çizmek yeterli değildir.

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

Gönderilen dosyalar:

6. Simetrik bir küme üzerinde tanımlı, çift ve periyodik bir fonksiyonun türevi için aşağıdakilerden hangileri kesinlikle doğrudur?

   (I) Bu fonksiyonun türevi çift bir fonksiyondur.

   (II) Bu fonksiyonun türevi tek bir fonksiyondur.

   (III) Bu fonksiyonun türevi periyodik bir fonksiyondur.

   (IV) Bu fonksiyonun türevi ne çift ne de tek fonksiyondur.

   Yalnızca bir şıkkı işaretleyin.

   - I, III
   - Yalnız IV
   - Yalnız III
   - ❌ II, III
   - III, IV

7. Aşağıda verilen ifadelerden hangileri kesinlikle doğrudur?

   (I) Bir fonksiyon, bir a noktasında sürekli değilse a noktasında türevlenemezdir.

   (II) Bir fonksiyon, bir a noktasında türevlenemez ise a noktasında sürekli değildir.

   (III) Bir fonksiyon, bir a noktasında türevlenebilir ise a noktasında süreklidir.

   Yalnızca bir şıkkı işaretleyin.

   - Yalnız II
   - I, II
   - ❌ I, III
   - Yalnız III
   - I, II, III

8.

$A \subset \mathbb{R}$ bir açık küme olmak üzere $f, g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları bir x_0 noktasında türevlenebilir değil iken $f.g$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu örnekler aşağıdakilerden hangileridir?

(I) $f(x) = \dfrac{x}{|x-4|}$, $g(x) = |x-4|$, $x_0 = 4$

(II) $f(x) = |x-2|$, $g(x) = |x-2|$, $x_0 = 2$

(III) $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x_0 = 0$

(IV) $f(x) = |x|$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x_0 = 0$

Yalnızca bir şıkkı işaretleyin.

- I, III
- I, II, III
- Yalnız II
- II, IV
- I, II, III, IV

9.

$x \in (1, +\infty)$ olmak üzere $f(x) = 2x^2 - x^4$ fonksiyonunun tersinin $y_0 = -1$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

Yalnızca bir şıkkı işaretleyin.

$$-\frac{1}{8+24\sqrt{2}}$$

1. seçenek

$$\frac{1}{32-32\sqrt{2}}$$

2. seçenek

Yoktur

3. seçenek

$$-\frac{1}{4\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

4. seçenek

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

5. seçenek

Bu içerik Google tarafından oluşturulmamış veya onaylanmamıştır.

1. **Soru:** $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\leq 1 \quad (x\in[-1,1]) \\ \frac{1}{e}, & |x|>1 \quad (x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)) \end{cases}$

fonksiyonunun türevini bulunuz

ÇÖZÜM: $x=\mp 1$ noktalarında sağ-sol türev bakılmalıdır.

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{e}-\frac{1}{e}}{x-1}=0$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2e^{-x^2}-\frac{1}{e}}{x-1}\to\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

L'Hospital yapılırsa

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2xe^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x).x^2}{1}=0$$

olup $f'(1^+)=f'(1^-)=0$ olduğundan $f'(1)=0$ dır.

$$f'(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2e^{-x^2}-\frac{1}{e}}{x+1}\to\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

L'Hospital yapılırsa

$$f'(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\frac{2xe^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x).x^2}{1}=0$$

olur.

$$f'(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{1}{e}-\frac{1}{e}}{x+1}=0$$

olup $f'(-1^+)=f'(-1^-)=0$ olduğundan $f(-1)=0$ bulunur.

Ayrıca

$x\in(-1,1)$ için $f'(x)=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}$

ve

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ için $f'(x)=0$

olur. Böylece

$$f'(x)=\begin{cases} 2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}, & x\in(-1,1) \\ 0, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \end{cases}$$

elde edilir.

Scanned with CamScanner

2. Soru : Her a ve b reel sayısı için aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$$\left|\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{b^2+1}\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{8}\,|a-b|$$

ÇÖZÜM : $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonu $[b,a]$ aralığında sürekli ve (b,a) aralığında türevlenebilir olduğundan, ortalama değer teoreminden

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \quad \dots (1)$$

olacak şekilde $\exists c\in(b,a)$ vardır.

$f(x)=(x^2+1)^{-1}$ iken $f'(x)=-(x^2+1)^{-2}\cdot(2x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

olur. $f'(x)=g(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ olsun. O halde

$$g'(x)=-\frac{2(1+x^2)^2-2(1+x^2).2x.2x}{(1+x^2)^4} = -\frac{2+2x^2-8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \quad \text{olur.}$$

bulunur. $g'(x)=0$ ise $6x^2-2=0 \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ $\quad g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ dır. Ayrıca

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^4\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x^3\left(\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}+1\right)^2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0$$

bulunur. Böylece

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
g'		+	0	−	0	+	
g	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↗	0

olup $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, g nin mutlak maksimum noktası ve $\frac{-3\sqrt{3}}{8}$ g nin mutlak minimum noktasıdır. O halde $f'=g$ olduğundan $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$|f'(x)| \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ yazılır. Böylece $c\in(b,a)$ için $|f'(c)| \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ olur.

(1) den

$$|f(c)| = \left|\frac{\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{b^2+1}}{a-b}\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\left|\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{b^2+1}\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{8}\,|a-b|$$

elde edilir.

Scanned with CamScanner

3. **Soru:** $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm 1) Tanım Kümesi: $1-x^2=0 \Rightarrow (1-x)(1+x)=0 \Rightarrow x=\mp 1$

olup $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ bulunur.

2) Eksenleri Kesim Noktaları: $x=0 \Rightarrow y=0$ olur.

$y=0 \Rightarrow x=0$ olup $(0,0)$ dan geçer.

3) Asimptotlar: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=-\infty$

olup $x=1$ düşey asimptot olur.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=+\infty$ ve $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=-\infty$

olduğundan $x=-1$ düşey asimptot olur.

$\lim\limits_{x\to \mp\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{1}{x\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}=0$

olduğundan $y=0$ yatay asimptot olur. Eğik ve eğri asimptot yoktur.

4) 1. mertebeden türev: $f'(x)=\dfrac{1-x^2-(-2x).x}{(1-x^2)^2}=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

olup $f'(x)=0$ olacak şekilde $x\in\mathbb{R}$ yoktur. $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ için $f'(x)>0$ dır.

5) Tablo:

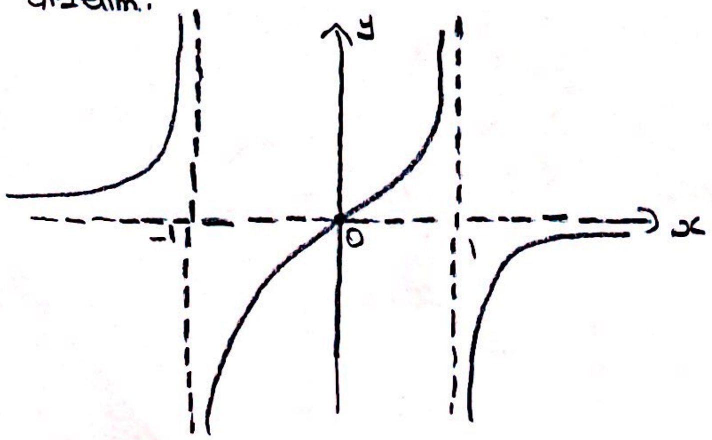
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

$y=0$ ile f kesişir mi?

$\dfrac{x}{1-x^2}=0 \Rightarrow x=0$

$(0,0)$ da kesişirler.

Grafiği çizelim.



Scanned with CamScanner